Ravninski grafi in izrek Kuratowskega

Tina Grajzar

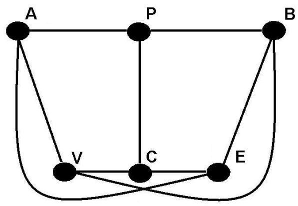
8. januar 2007

1 Ravninski grafi

1.1 Risanje v ravnino

Definicija 1.1 Graf je *ravninski*, če se ga da narisati v ravnini brez sekanja povezav, razen v skupnih krajiščih. Tako risanje je *ravninska vložitev* grafa G.

Zgled 1.1 Imamo dve množici vozlišč in vsaka ima tri vozlišča. Vsako vozlišče bi radi povezali z vsakim vozliščem iz druge množice tako, da se povezave med seboj ne bodo sekale. Ali je to možno?



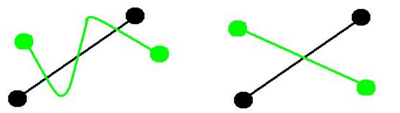
Slika 1: Vozlišča A, B in C pripadajo eni množici, vozlišča P, V ter E pa drugi.

Naslednja trditev nam da odgovor na to vprašanje.

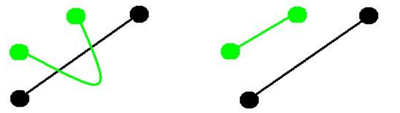
Trditev 1.1 *Grafa K_5 in $K_{3,3}$ se ne da narisati v ravnino brez sekanja povezav.*

Dokaz. Predpostavimo, da se ju da. Opazimo, da sta grafa K_5 in $K_{3,3}$ Hamiltonova (to pomeni, da v grafu obstaja cikel, na katerem so vsa vozlišča grafa oziroma obstaja cikel, ki vsako vozlišče obišče natanko enkrat in tak cikel imenujemo *Hamiltonov cikel*). Naj bo C Hamiltonov cikel. Diagonale cikla C so lahko narisane znotraj ali zunaj te krivulje. Ko pridemo do situacije, ko se dve diagonali sekata, eno narišemo znotraj C, eno pa zunaj C. Pri grafu $K_{3,3}$ imamo cikel dolžine 6, ki ima tri pare sekajočih diagonal. Največ eno lahko postavimo znotraj in eno zunaj cikla, torej ni možno dokončati vložitve. Pri grafu K_5 pa je C dolžine 5, kjer sta lahko največ dve diagonali znotraj ali zunaj. Ker pa imamo 5 diagonal, znova ni možno dokončati vložitve. Torej $K_{3,3}$ in K_5 nista ravninska. □

Opomba: Če se dve povezavi sekata več kot enkrat, se ju da prestaviti tako, da zmanjšamo število presečišč na eno ali nič. Torej se vedno da graf narisati tako, da se poljubni dve povezavi sekata največ enkrat.



Slika 2: Iz treh presečišč lahko dobimo eno samo.



Slika 3: Lahko se znebimo dveh presečišč.

1.2 Dualni grafi

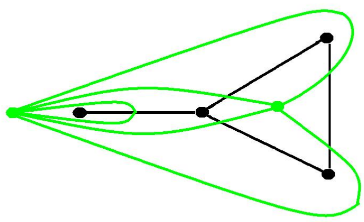
Definicija 1.2 *Dualni graf* $G^\star$ ravninskega grafa G je ravninski graf, ki ga dobimo tako, da:

1. v vsako lice f grafa G dodamo vozlišče $f^\star \in V(G^\star)$;
2. za vsako povezavo e grafa G, ki loči lici f_1 in f_2, povežemo vozlišči $f_1^\star$ in $f_2^\star$ v $G^\star$ s povezavo $e^\star$.

Zgled 1.2 Vsaka ravninska vložitev K_4 ima 4 lica, ki si v parih delijo mejne povezave, se pravi, da imata vsaki 2 lici eno skupno povezavo. Torej je dual ponovna kopija K_4.

Zgled 1.3 Vsaka ravninska vložitev kocke Q_3 ima 8 vozlišč, 12 povezav in 6 lic. Nasprotna lica nimajo skupnih mej. Torej je dual ravninska vložitev $K_{2,2,2}$.

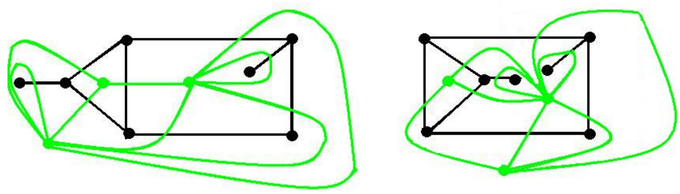
Zgled 1.4 Na Sliki 4 je graf G, ki ima 4 vozlišča, 4 povezave in 2 lici. Graf $G^\star$ pa ima 2 vozlišči, 4 povezave in 2 lica.



Slika 4: Dualni graf, ki vsebuje zanke in multi povezave.

Na tem primeru lahko vidimo, da ima enostaven ravninski graf zanke in multi povezave v dualu. Prerezna povezava v G preide v zanko v $G^\star$, ko je na obeh straneh isto lice. Multi povezava pa se ustvari takrat, ko imata dve različni lici v G več kot eno skupno mejno povezavo.

Zgled 1.5 Dve vložitvi grafa nimata nujno izomorfna duala. Vsaka vložitev na Sliki 5 ima 3 lica, torej ima vsak dual 3 vozlišča. Pri vložitvi na desni ima dualno vozlišče v zunanjem licu stopnjo 4. Pri vložitvi na levi pa nobeno vozlišče v dualu nima stopnje 4. Torej duala nista izomorfna.



Slika 5: Dva izomorfna grafa, ki imata neizomorfna duala.

Opomba: Zgornja situacija se ne zgodi z grafi, ki so 3-povezani, saj ima vsak 3-povezan ravninski graf eno samo vložitev v ravnino.

Z $e(G)$ označimo število povezav grafa G, z $d_G(v)$ pa označimo stopnjo vozlišča $v \in V(G)$.

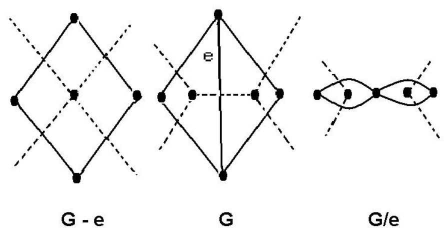
Trditev 1.2 *Če $l(f_i)$ označuje dolžino lica f_i v ravninskem grafu G, potem velja*

$$2e(G) = \sum_{f_i \in F(G)} l(f_i). \tag{1}$$

Dokaz. Vemo že, da je dolžina lica enaka stopnji vozlišča v dualu. Ker velja $e(G) = e(G^\star)$, je Trditev (1) enaka že poznani formuli $2e(G^\star) = \sum_{v \in V(G)} d_{G^\star}(v)$ za $G^\star$ (obe vsoti upoštevata vsako povezavo dvakrat). □

Zdaj si pa poglejmo kako se grafa G in $G^\star$ spreminjata glede na operaciji odstranjevanje in krčenje povezav.

Zgled 1.6 Če odstranimo neprerezno povezavo grafa G, to povzroči skrčitev povezave v $G^\star$, ko se dve lici v G združita v eno. Skrčitev povezave v G, ki ni zanka, povzroči brisanje povezave v $G^\star$. Na Sliki 6 je na sredini graf G. Na levi je graf $G - e$, na desni pa G/e.



Slika 6: Grafi $G - e$, G, G/e in njihovi duali.

1.3 Eulerjeva formula

Izrek 1.1 (Euler [4]) *Če ima povezan graf G n vozlišč, e povezav in f lic, potem velja*

$$n - e + f = 2. \tag{2}$$

Dokaz. Trditev bomo pokazali z indukcijo po številu vozlišč n. Če je $n = 1$, potem ima graf G eno vozlišče, povezave, če so, pa so zanke. Če je $e = 0$, potem je $f = 1$ in (2) drži. Z vsako dodano zanko na licu, se lice razdeli na dva dela. S tem se poveča število povezav in število lic za 1. Torej tudi v tem primeru (2) velja.

Zdaj pa napravimo indukcijski korak za $n > 1$: Ker je G povezan, lahko najdemo povezavo, ki ni zanka. Ko tako povezavo skrčimo, dobimo ravninski graf G' z n' volzišči, m' povezavami in f' lici. Skrčitev ne spremeni število lic (samo zmanjšali smo lice), zmanjša pa se število povezav in vozlišč za 1. Torej je $n' = n - 1$, $e' = e - 1$, $f' = f$ in od tod sledi

$$n - e + f = n' + 1 - (e' + 1) + f' = n' - e' + f' = 2.$$

□

Po Eulerjevi formuli lahko vidimo, da imajo vse ravninske vložitve grafa G isto število lic. Čeprav je dual lahko odvisen od vložitve, pa število vozlišč v dualu ni odvisno od vložitve.

Formula (2) ne velja za nepovezane grafe. Če ima ravninski graf G k komponent, potem z dodanimi $k - 1$ povezavami G postane povezan graf, kateremu nismo spremenili število lic. Torej je Eulerjeva formula posplošena za ravninske grafe s k komponentami $n - e + f = 2 + k - 1 = k + 1$.

Trditev 1.3 *Če je G enostaven ravninski graf z n vozlišči, e povezavami in f lici ter z vsaj tremi vozlišči, je*

$$e \leq 3n - 6.$$

Če pa je G brez trikotnikov, potem velja

$$e \leq 2n - 4.$$

Dokaz. Dovolj je pogledati za povezane grafe (drugače pa jim dodamo povezave). Če je $n \geq 3$, potem vsako lice v enostavnem grafu vsebuje najmanj 3 povezave. Z uporabo (1) dobimo neenakost med e in f. Naj bo f_i število lic dolžine i v grafu G in dobimo $2e = \sum f_i \geq 3f$. Če to zdaj upoštevamo v Eulerjevi formuli, dobimo $e \leq 3n - 6$. Če G nima trikotnikov, to pomeni, da imajo lica dolžino vsaj 4. V tem primeru pa velja $2e = \sum f_i \geq 4f$ in dobimo po Eulerjevi formuli $e \leq 2n - 4$. □

Zgled 1.7 Neravninskost grafov K_5 in $K_{3,3}$ sledi iz te trditve. Za K_5 imamo $e = 10 > 9 = 3n - 6$. Ker je graf $K_{3,3}$ brez trikotnikov, imamo $e = 9 > 8 = 2n - 4$. Torej imata grafa preveč povezav, da bi bila ravninska.

Definicija 1.3 *Maksimalni ravninski graf* je enostaven graf, ki ni vpet podgraf nekega drugega ravninskega grafa.

Trditev 1.4 *Za enostaven ravninski graf G z n vozlišči so naslednje trditve ekvivalentne.*

1. *G ima $3n - 6$ povezav;*
2. *G je triangulacija;*
3. *G je maksimalen ravninski graf.*

Dokaz. Najprej dokažimo, da sta 1. in 2. ekvivalentni. Za enostaven ravninski graf z n vozlišči po dokazu Trditve 1.3 velja, da če ima graf $3n-6$ povezav, je to enakovredno $2e = 3f$, kar velja natanko tedaj, ko je vsako lice cikel dolžine 3. Zdaj pa dokažimo še, da sta 2. in 3. ekvivalentni. Obstaja lice, ki daljše od lica dolžine 3 natanko tedaj, ko obstaja možnost, da dodamo povezavo in obdržimo večji enostavni ravninski graf. $\square$

2 Izrek Kuratowskega

Na dva načina smo že dokazali, da se grafa K_5 in $K_{3,3}$ ne data vložiti v ravnino. V bistvu sta to odločilna grafa in vodita v karakterizacijo ravninskih grafov, znana kot Izrek Kuratowskega.

Definicija 2.1 *Subdivizija* grafa G je graf H, ki ga dobimo tako, da povezave grafa G nadomestimo s paroma disjunktnimi potmi. Vozlišči, ki sta hkrati v G in v H, imenujemo *glavni vozlišči.*

Definicija 2.2 Graf H je *minor* grafa G, če ga lahko dobimo iz grafa G z odstranjevanjem in/ali krčenjem povezav ter odstranjevanjem vozlišč grafa G.

Trditev 2.1 *Če G vsebuje podgraf, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$, potem je G neravninski.*

Dokaz zgornje trditve hitro sledi iz dejstva, da sta K_5 in $K_{3,3}$ neravninska. Zato je izogibanje subdivizij K_5 in $K_{3,3}$ potreben pogoj, da je graf ravninski.

Definicija 2.3 *Podgraf Kuratowskega* grafa G je podgraf grafa G, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$. *Minimalni neravninski graf* je tak neravninski graf, da je vsak pravi podgraf ravninski.

Izrek 2.1 (Kuratowski [3]) *Graf je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje subdivizijo grafa K_5 ali $K_{3,3}$.*

Opomba: Poznamo tudi Izrek Kuratowskega v minorski obliki: *graf je neravninski natanko tedaj, ko je graf brez K_5 ali $K_{3,3}$ minorjev.*

Dokazali bomo, da mora biti minimalen neravninski graf brez Kuratowskega podgrafa 3-povezan. Dokaz, da je vsak 3-povezan graf brez Kuratowskega podgraf ravninski, nam zaključi dokaz Kuratowskega izreka.

Tutte [7] je dokazal, da vsak 3-povezan ravninski graf ima konveksno vložitev (t.j. ravninska vložitev, pri kateri je vsako lice konveksni poligon). Za $n \geq 4$ je $K_{2,n}$ 2-povezan ravninski graf , ki nima konveksne vložitve.

Lema 2.1 *Naj bo G enostaven graf z vsaj 4 vozlišči, ki ne vsebuje subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$ (se pravi, da ne vsebuje podgrafa Kuratowskega). Če pa povežemo poljubni par nesosednjih vozlišč, potem pa ustvarimo tako subdivizijo. Tedaj je graf 3-povezan.*

Dokaz. Recimo, da graf ni povezan. To pomeni, da je sestavljen iz vsaj dveh disjunktnih komponent. Zdaj pa povežimo dve poljubni nesosednji vozlišči, ki sta v različnih komponentah. S tem dobimo most. Po predpostavki prvotni graf ni vseboval Kuratowskega podgrafa in tudi če dodamo to povezavo ne dobimo Kuratowskega podgrafa, saj sta grafa K_5 in $K_{3,3}$ 3-povezana. Torej je graf povezan.

Dokaz bomo nadaljevali z indukcijo po številu vozlišč grafa. Za $n = 4, 5$ je očitno, da to velja, saj je edini 3-povezan graf na štirih volziščih K_4. Vemo pa, da je $K_5 - e$ 3-povezan.

Recimo, da je graf G 1-povezan, potem ima prerezno vozlišče tako, da velja $G_1 \cap G_2 = \{v\}$ in $G_1 \cup G_2 = G$. Naj bosta v_1 in v_2 vozlišči, sosedni z v in ležita v različnih delih G_1, G_2 grafa G. Dodamo povezavo v_1v_2 in to ustvari subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$ v $G + v_1v_2$. Ponovno, ker sta grafa K_5 in $K_{3,3}$ 3-povezana sledi, da so vsa glavna vozlišča te subdivizije bodisi v G_1 bodisi v G_2. Ker pa sta v_1 in v_2 sosednji z v sledi, da obstaja tudi v G subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$. S tem smo prišli v protislovje s predpostavko, torej graf G ni 1-povezan.

Recimo zdaj, da je graf G 2-povezan in ima dve nesosednji vozlišči x in y, ki razcepita graf. Sedaj pa povežimo vozlišči x in y in naj velja $G_1 \cap G_2 = \{xy\}$ in $G_1 \cup G_2 = G \cup \{xy\}$. Podobno kot prej, ker sta grafa K_5 in $K_{3,3}$ 3-povezana, so vsa glavna vozlišča bodisi v G_1 bodisi v G_2. In od tod hitro sledi, da obstaja subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$ v grafu G. Ponovno je to v protislovju s predpostavko, torej graf G ni 2-povezan.

Pri 3-povezanem grafu brez Kuratowskega podgrafa pa z dodano povezavo dobimo K_5 ali $K_{3,3}$, torej mora biti graf G 3-povezan. □

Thomassen [5] je dokazal Izrek Kuratowskega tako, da je dokazal močnejši Tuttov izrek za 3-povezane grafe brez podgrafov Kuratowskega. Ta izrek dokažemo z indukcijo na število vozlišč. Da bo graf G 3-povezan in da ne bo imel podgrafa Kuratowskega, moramo poiskati manjši graf G', ki bo zadostoval obema predpostavkama in indukcijski predpostavki. Thomassenov izrek nam priskrbi manjši 3-povezan graf G' s skrčitvijo poljubne povezave v G. Lema 2.2 pa nam zagotovi, da bo G' ne bo imel podgrafa Kuratowskega.

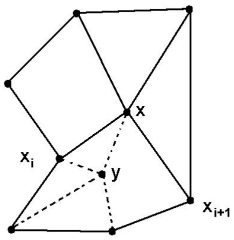
Izrek 2.2 (Tutte, Thomassen [6]) *Vsak 3-povezan graf G z vsaj petimi vozlišči ima tako povezavo e, da je G/e 3-povezan.*

Lema 2.2 *Če graf G nima podgrafa Kuratowskega, potem tudi graf G/e nima podgrafa Kuratowskega.*

Izrek 2.3 (Tutte [8]) *Če je G 3-povezan graf brez subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$, potem ima G tako konveksno vložitev v ravnino, da nobena tri vozlišča ne ležijo na premici.*

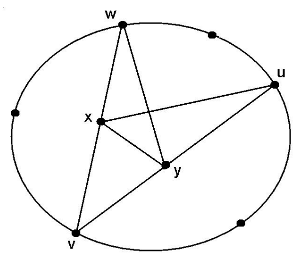
Dokaz. Pokazali bomo z indukcijo po število vozlišč graf G. Osnovni korak: za $|V(G)| \leq 4$ je edini 3-povezan graf K_4, ki pa ima tako vložitev.

Indukcijski korak: $|V(G)| \geq 5$. Naj bo $e = xy$ taka povezava, da je G/e 3-povezan, kot pravi Tutte-Thomassenov izrek. Naj bo z vozlišče, ki smo ga dobili, ko smo skrčili povezavo e. Po Lemi 2.2, G/e nima podgrafa Kuratowskega. Po indukcijski predpostavki, dobimo konveksno vložitev $H = G/e$, ki nima treh vozlišč na premici. V tej vložitvi ima podgraf, ki smo ga dobili z brisanjem povezav sosednjih k z, lice, ki vsebuje z. Ker je $H - z$ 2-povezan, je lice cikel, ki ga označimo s C. Vsi sosedje vozlišča z ležijo na C. Konveksna vložitev grafa H vključuje ravne črte iz vozlišča z do vseh njegovih sosedov. V G pa imamo tudi sosede vozlišč x in y. Naj bodo $x_1, \ldots, x_k$ sosedi vozlišča x na ciklu C. Če vsi sosedje y ležijo na delu cikla C med x_i in x_{i+1}, potem dobimo konveksno vložitev grafa G tako, da postavimo x na z v H in y na vozlišče blizu z v kotu dobljenega z xx_i in xx_{i+1} kot je prikazano na Sliki 7.



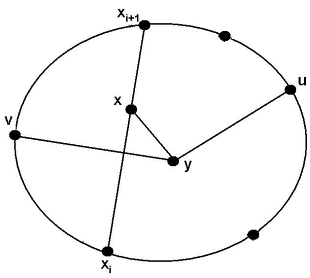
Slika 7: Zaradi konveksne vložitve ločimo dva primera. Prvi ima vozlišče x na notrnanjih licih, drugi pa ima x na zunanjem licu.

To je samo eden izmed treh primerov, ki se lahko zgodijo. Drug primer se pojavi, ko imata x in y skupne sosede u, v in w. V tem primeru cikel C skupaj z xy in povezavami iz $\{x, y\}$ v $\{u, v, w\}$ tvorijo subdivizijo K_5. To je prikazano na Sliki 8.



Slika 8: x in y imata skupne sosede u, v in w.

V tretjem primeru pa ima y soseda u in v, ki alternirata na ciklu C s x_i, x_{i+1}, ki sta soseda x. Cikel C skupaj s potmi uyv, $x_i x x_{i+1}$ in xy oblikujejo subdivizijo $K_{3,3}$.



Slika 9: Sosedi y alternirajo na ciklu C s sosedi x.

Ker upoštevamo samo grafe, ki nimajo podgrafa Kuratowskega, se mora zgoditi samo prvi primer, se pravi Slika 7. $\square$

Skupaj s Trditvijo 2.1, Lemo 2.1 in Tuttovem izrekov hitro dobimo Izrek Kuratowskega.

Literatura

[1] D. B. West, *Introduction to graph theory*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ. (2001) 233–251.

[2] H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, Nelson (1917).

[3] K. Kuratowski, *Sur le probleme des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. **15** (1930) 271–283.

[4] L. Euler, *Demonstratio Nounnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hedris Planis Inclusa Sunt Praedita*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol, **4** (1758) 140–160.

[5] C. Thomassen, *Kuratowski's Theorem*, J. Graph Theory **5** (1981) 225–241.

[6] C. Thomassen, *Planarity and duality of finite and infinite graphs*, J. Combin. Theory Ser. (B) **29** (1980) 244–271.

[7] W. T. Tutte, *Convex representations of graphs*, Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1960) 304–320.

[8] W. T. Tutte, *How to draw a graph*, Proc. Lond. Math. Soc. **13** (1963) 743–767.